

BİR SINIF FONKSİYONEL UZAYLARIN BAZI ÖZELLİKLERİNİN İNCELENMESİ

Uğur SERT ve Kamal SOLTANOV

Hacettepe Üniversitesi

1. Giriş

Bu çalışmada aşağıdaki gibi tanımlanan uzayların bazı özellikleri ile onların Sobolev Uzaylarıyla olan bağlantıları incelenmiştir.

$$S_{m,\alpha,\beta}(\Omega) \equiv \left\{ u(x) \in L_1(\Omega) \mid [u]_{S_{m,\alpha,\beta}}^{\alpha+\beta} \equiv \sum_{0 \leq |\sigma| \leq m} \left(\int_{\Omega} |u|^{\alpha} |D^{\sigma} u|^{\beta} dx \right) < \infty \right\} \quad (1.1)$$

Burada $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$ ve $m = 1, 2$ 'dir. Dahası $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) bölgesi sınırı yeterince düzgün olan ve sınırlı alt bölgedir.

1. Giriş

Bu çalışmada aşağıdaki gibi tanımlanan uzayların bazı özellikleri ile onların Sobolev Uzaylarıyla olan bağlantıları incelenmiştir.

$$S_{m,\alpha,\beta}(\Omega) \equiv \left\{ u(x) \in L_1(\Omega) \mid [u]_{S_{m,\alpha,\beta}}^{\alpha+\beta} \equiv \sum_{0 \leq |\sigma| \leq m} \left(\int_{\Omega} |u|^{\alpha} |D^{\sigma} u|^{\beta} dx \right) < \infty \right\} \quad (1.1)$$

Burada $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$ ve $m = 1, 2$ 'dir. Dahası $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) bölgesi sınırı yeterince düzgün olan ve sınırlı alt bölgedir.

Bu uzaylar aşağıdaki tipte verilen denklemlerin incelenmesi sonucu ortaya çıkmıştır: 1.1'de $m = 1$ durumunda

Difüzyon ve Filtreleme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n D_i (k(x, u) D_i u) = h(x, t)$$

Bebernes ve Galaktionov [1], Luckhaus ve R.Dal Passo [15] ve Soltanov'un [9], [10]

$$\begin{aligned} -\Delta u + u + |u|^p u &= h(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + |u|^\mu u \right) |_{\partial \Omega} &= \psi(x'), \quad x' \in \partial \Omega, \quad p, \mu \geq 0 \end{aligned}$$

Soltanov [7], [11], (Ayrıca bu denklem Berestycki ve Nirenberg [2], Brezis [3] ve Pohozaev'in [6] makalelerinde de farklı formda incelenmiştir)

Bu uzaylar aşağıdaki tipte verilen denklemlerin incelenmesi sonucu ortaya çıkmıştır: 1.1'de $m = 1$ durumunda

Difüzyon ve Filtreleme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n D_i (k(x, u) D_i u) = h(x, t)$$

Bebernes ve Galaktionov [1], Luckhaus ve R.Dal Passo [15] ve Soltanov'un [9], [10]

$$\begin{aligned} -\Delta u + u + |u|^p u &= h(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + |u|^\mu u \right) |_{\partial \Omega} &= \psi(x'), \quad x' \in \partial \Omega, \quad p, \mu \geq 0 \end{aligned}$$

Soltanov [7], [11], (Ayrıca bu denklem Berestycki ve Nirenberg [2], Brezis [3] ve Pohozaev'in [6] makalelerinde de farklı formda incelenmiştir)

Bu uzaylar aşağıdaki tipte verilen denklemlerin incelenmesi sonucu ortaya çıkmıştır: 1.1'de $m = 1$ durumunda

Difüzyon ve Filtreleme

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n D_i (k(x, u) D_i u) = h(x, t)$$

Bebernes ve Galaktionov [1], Luckhaus ve R.Dal Passo [15] ve Soltanov'un [9], [10]

$$\begin{aligned} -\Delta u + u + |u|^p u &= h(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + |u|^\mu u \right) |_{\partial \Omega} &= \psi(x'), \quad x' \in \partial \Omega, \quad p, \mu \geq 0 \end{aligned}$$

Soltanov [7], [11], (Ayrıca bu denklem Berestycki ve Nirenberg [2], Brezis [3] ve Pohozaev'in [6] makalelerinde de farklı formda incelenmiştir)

1.1'de $m = 2$ durumunda

Akışkanlar Mekaniği

$$\frac{\partial u}{\partial t} - |u|^{p-2} \Delta u = h(x, t), \quad p \geq 2$$

Soltanov [8], [9], [10] (Ayrıca bu tip denklemler Tsutsumi, Ishiwata [12], Walter [13], Wiegner'in [14] makalelerinde de incelenmiştir)

Tanım

m negatif olmayan keyfi tam sayı olmak üzere, $0 \leq |\alpha| \leq m$ eşitsizliğini sağlayan her bir α multiindeksi için $D^\alpha \phi$ kısmi türevleri Ω' 'da sürekli olan fonksiyonlardan oluşan lineer uzaya $C^m(\Omega)$

$0 \leq |\alpha| \leq m$ eşitsizliğini sağlayan her bir α multiindeksi için $D^\alpha \phi$ kısmi türevleri Ω' 'da düzgün sürekli ve sınırlı olan $\phi \in C^m(\Omega)$ fonksiyonlarından oluşan lineer uzaya $C^m(\bar{\Omega})$ uzayı denir.

Sobolev Uzayı

$$W_p^k(\Omega) \equiv \{u \in L_p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L_p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq k\}$$

$$\|u\|_{k,p} \equiv \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.2)$$

$$\|u\|_{k,p}^1 \equiv \|u\|_p + \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_p$$

ve

$$\|u\|_{k,p}^2 \equiv \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_p$$

$$\mathring{W}_p^k(\Omega) \equiv \left\{ u \in W_p^k(\Omega) \mid D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0, \ 0 \leq |\alpha| \leq k-1 \right\}$$

$$\|u\|_{\mathring{W}_p^k} \equiv \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_p, \ u \in \mathring{W}_p^k(\Omega)$$

Sobolev Gömülme Teoremleri

$\Omega \in \ell^{0,1}$, $\mathbb{R}^n$ 'de bir bölge ($n \geq 1$) k pozitif tam sayı ve $1 \leq p < \infty$ olsun.

(i) Eğer $kp < n$ ise $1 \leq q \leq \frac{np}{n-kp}$ için

$$W_p^k(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$$

(ii) Eğer $kp = n$ ise $1 \leq r < \infty$ için

$$W_p^k(\Omega) \hookrightarrow L_r(\Omega)$$

ve

(iii) Eğer $kp > n$ ise

$$W_p^k(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega})$$

sürekli gömülmeleri sağlanır.

Young ve Hölder Eşitsizlikleri

$1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0)$$

veya

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q \quad (\varepsilon > 0)$$

$1 \leq p_1, \dots, p_m \leq \infty, \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$ olsun. $u_j \in L_{p_j}(\Omega)$,

$j = \overline{1, m}$ ise

$$\int_{\Omega} |u_1 \dots u_m| dx \leq \prod_{j=1}^m \|u_j\|_{L_{p_j}(\Omega)}$$

Young ve Hölder Eşitsizlikleri

$1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0)$$

veya

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q \quad (\varepsilon > 0)$$

$1 \leq p_1, \dots, p_m \leq \infty, \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$ olsun. $u_j \in L_{p_j}(\Omega)$,

$j = \overline{1, m}$ ise

$$\int_{\Omega} |u_1 \dots u_m| dx \leq \prod_{j=1}^m \|u_j\|_{L_{p_j}(\Omega)}$$

Young ve Hölder Eşitsizlikleri

$1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0)$$

veya

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q \quad (\varepsilon > 0)$$

$1 \leq p_1, \dots, p_m \leq \infty, \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$ olsun. $u_j \in L_{p_j}(\Omega)$,

$j = \overline{1, m}$ ise

$$\int_{\Omega} |u_1 \dots u_m| dx \leq \prod_{j=1}^m \|u_j\|_{L_{p_j}(\Omega)}$$

2. İntegral Eşitsizlikler

Bu çalışmada incelediğimiz uzayların bazı özellikleri ve bu uzayların bilinen uzaylarla olan ilişkilerini incelemek için aşağıdaki eşitsizlikleri ispatladık

Önerme 2.1

$\alpha \geq 0, \beta \geq 1, \text{mes}(\Omega) < \infty$ ve $i = \overline{1, n}$,
 $C_1 = C_1(\alpha, \beta, \text{mes}(\Omega)) > 0, C_2 = C_2(\text{mes}(\Omega)) > 0$ olmak üzere
keyfi $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Omega} |u|^{\alpha+\beta} dx \leq C_1 \int_{\Omega} |u|^{\alpha} |D_i u|^{\beta} dx + C_2 \int_{\partial\Omega} |u|^{\alpha+\beta} dx' \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanır.

2. İntegral Eşitsizlikler

Bu çalışmada incelediğimiz uzayların bazı özellikleri ve bu uzayların bilinen uzaylarla olan ilişkilerini incelemek için aşağıdaki eşitsizlikleri ispatladık

Önerme 2.1

$\alpha \geq 0, \beta \geq 1, \text{mes}(\Omega) < \infty$ ve $i = \overline{1, n}$,
 $C_1 = C_1(\alpha, \beta, \text{mes}(\Omega)) > 0, C_2 = C_2(\text{mes}(\Omega)) > 0$ olmak üzere
keyfi $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Omega} |u|^{\alpha+\beta} dx \leq C_1 \int_{\Omega} |u|^{\alpha} |D_i u|^{\beta} dx + C_2 \int_{\partial\Omega} |u|^{\alpha+\beta} dx' \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanır.

Önerme 2.2

$\alpha, \alpha_1 \geq 0, \beta \geq 1$ ve $\beta > \beta_1 > 0, \frac{\alpha_1}{\beta_1} \geq \frac{\alpha}{\beta}, \alpha_1 + \beta_1 \leq \alpha + \beta$

eşitsizlikleri sağlansın. $C_r = C_r(\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1, \text{mes}(\Omega)), r = \overline{0, 2}$ ve

$C_1, C_2 \geq 0, C_0 > 0$ olmak üzere keyfi bir $u \in C(\bar{\Omega}) \cap$

$C^1(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Omega} |u|^{\alpha_1} |D_i u|^{\beta_1} dx \leq C_0 \int_{\Omega} |u|^{\alpha} |D_i u|^{\beta} dx + C_1 \int_{\partial\Omega} |u|^{\alpha+\beta} dx' + C_2 \quad (2.2)$$

eşitsizliği sağlanır.

Önerme 2.3

$\alpha \geq 0$, $\beta_0 + \beta_1 \geq 2$ ve $\beta_1 \geq \beta_0 \geq 0$ eşitsizlikleri sağlansın.
 $C_j = C_j(\alpha, \beta_0, \beta_1) > 0$, $j = 1, 2$ u 'ya bağlı olmayan sabitler olmak üzere keyfi $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ fonksiyonu için;

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u|^{\alpha} |D_i u|^{\beta_0 + \beta_1} dx &\leq C \int_{\Omega} |u|^{\alpha + \beta_0} |D_i^2 u|^{\beta_1} dx + \\ &+ C_1 \int_{\partial\Omega} (|u|^{\alpha + \beta_0 + \beta_1} + |u|^{\alpha + 1} |D_i u|^{\beta_0 + \beta_1 - 1}) dx' \end{aligned} \quad (2.3)$$

eşitsizliği sağlanır.

3. BAZI LİNEER OLMAYAN UZAYLAR, BU UZAYLARIN KENDİ ARALARINDA VE SOBOLEV UZAYLARI ARASINDAKİ BAĞLANTILAR

$(a, b) \subset \mathbb{R}^1$, $mes(a, b) < \infty$ ve $u : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}^1$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$ olmak üzere; yukarıda verdiğimiz genel tanımdan yola çıkarak bir boyutlu durumda aşağıdaki fonksiyon sınıflarını elde ederiz:

$$S_{1,\alpha,\beta}(a, b) \equiv \left\{ u \in L_1(a, b) \mid [u]_{S_{1,\alpha,\beta}}^{\alpha+\beta} \equiv \int_a^b |u|^{\alpha+\beta} dx \right. \\ \left. + \int_a^b |u|^\alpha |Du|^\beta dx < \infty \right\}$$

$$S_{2,\alpha,\beta}(a,b) \equiv \left\{ u \in L_1(a,b) \mid [u]_{S_{2,\alpha,\beta}}^{\alpha+\beta} \equiv \int_a^b |u|^{\alpha+\beta} dx + \int_a^b |u|^\alpha |Du|^\beta dx + \int_a^b |u|^\alpha |D^2u|^\beta dx < \infty \right\}$$

ve

$$\mathring{S}_{m,\alpha,\beta}(a,b) \equiv S_{m,\alpha,\beta}(a,b) \cap \{u \mid u(a) = u(b) = 0\}, m = 1, 2 \text{ dir.}$$

$$S_{2,\alpha,\beta}(a,b) \equiv \left\{ u \in L_1(a,b) \mid [u]_{S_{2,\alpha,\beta}}^{\alpha+\beta} \equiv \int_a^b |u|^{\alpha+\beta} dx + \int_a^b |u|^\alpha |Du|^\beta dx + \int_a^b |u|^\alpha |D^2u|^\beta dx < \infty \right\}$$

ve

$$\mathring{S}_{m,\alpha,\beta}(a,b) \equiv S_{m,\alpha,\beta}(a,b) \cap \{u \mid u(a) = u(b) = 0\}, m = 1, 2 \text{ dir.}$$

Önerme 3.1

$\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$ ve $mes(a, b) < \infty$ olmak üzere $1 \leq q \leq \frac{\alpha+\beta}{\alpha+1}$ eşitsizliğini sağlayan keyfi q için

$$S_{1,\alpha,\beta}(a, b) \subseteq S_{1,\alpha q,q}(a, b) \quad (3.1)$$

kapsaması sağlanır.

Önerme 3.2

$\alpha, \alpha_1 \geq 0$ ve $\beta \geq 1$ olmak üzere $\beta \geq \beta_1 > 0$, $\frac{\alpha_1}{\beta_1} \geq \frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha_1 + \beta_1 \leq \alpha + \beta$ ve $mes(a, b) < \infty$ sağlansın. Bu durumda

$$S_{1,\alpha,\beta}(a, b) \subseteq S_{1,\alpha_1,\beta_1}(a, b)$$

kapsaması vardır.

Önerme 3.1

$\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$ ve $mes(a, b) < \infty$ olmak üzere $1 \leq q \leq \frac{\alpha+\beta}{\alpha+1}$ eşitsizliğini sağlayan keyfi q için

$$S_{1,\alpha,\beta}(a, b) \subseteq S_{1,\alpha q,q}(a, b) \quad (3.1)$$

kapsaması sağlanır.

Önerme 3.2

$\alpha, \alpha_1 \geq 0$ ve $\beta \geq 1$ olmak üzere $\beta \geq \beta_1 > 0$, $\frac{\alpha_1}{\beta_1} \geq \frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha_1 + \beta_1 \leq \alpha + \beta$ ve $mes(a, b) < \infty$ sağlansın. Bu durumda

$$S_{1,\alpha,\beta}(a, b) \subseteq S_{1,\alpha_1,\beta_1}(a, b)$$

kapsaması vardır.

Önerme 3.1

$\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$ ve $mes(a, b) < \infty$ olmak üzere $1 \leq q \leq \frac{\alpha+\beta}{\alpha+1}$ eşitsizliğini sağlayan keyfi q için

$$S_{1,\alpha,\beta}(a, b) \subseteq S_{1,\alpha q,q}(a, b) \quad (3.1)$$

kapsaması sağlanır.

Önerme 3.2

$\alpha, \alpha_1 \geq 0$ ve $\beta \geq 1$ olmak üzere $\beta \geq \beta_1 > 0$, $\frac{\alpha_1}{\beta_1} \geq \frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha_1 + \beta_1 \leq \alpha + \beta$ ve $mes(a, b) < \infty$ sağlansın. Bu durumda

$$S_{1,\alpha,\beta}(a, b) \subseteq S_{1,\alpha_1,\beta_1}(a, b)$$

kapsaması vardır.

Teorem 3.3

$\alpha \geq 0, \beta \geq 1$ olmak üzere $S_{1,\alpha,\beta}(a,b)$ uzayından $W_{\beta}^1(a,b)$ Sobolev uzayına bire-bir, örten bir g dönüşümü vardır ve bu dönüşüm

$$g : \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^1, \rho_0 = \frac{\alpha}{\beta}$$

olmak üzere

$$g(t) \equiv |t|^{\rho_0} t$$

formunda tanımlanır.

Böylece $u \in S_{1,\alpha,\beta}(a,b)$ ve $v \in W_{\beta}^1(a,b)$ olmak üzere

$$g(u) \equiv |u|^{\frac{\alpha}{\beta}} u \in W_{\beta}^1(a,b) \Leftrightarrow g^{-1}(v) \equiv |v|^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} v \in S_{1,\alpha,\beta}(a,b)$$

Önerme 3.4

$\alpha \geq 0$ ve $\beta \geq 2$ olmak üzere,

$$\dot{S}_{2,\alpha,\beta}(a,b) \equiv \left\{ u \in L_1(a,b) \mid \int_a^b |u|^\alpha |D^2 u|^\beta dx < \infty \right\}$$

$$\bigcap \{u \in L_1(a,b) \mid u(a) = u(b) = 0\} \equiv \tilde{S}$$

denkliği sağlanır.

Önerme 3.4

$\alpha \geq 0$ ve $\beta \geq 2$ olmak üzere,

$$\dot{S}_{2,\alpha,\beta}(a,b) \equiv \left\{ u \in L_1(a,b) \mid \int_a^b |u|^\alpha |D^2 u|^\beta dx < \infty \right\}$$

$$\bigcap \{u \in L_1(a,b) \mid u(a) = u(b) = 0\} \equiv \tilde{S}$$

denkliği sağlanır.

Teorem 3.5

$\alpha \geq \beta \geq 1$ olmak üzere $\dot{S}_{2,\alpha,\beta}(a,b)$ uzayından $\dot{W}_{\beta}^2(a,b)$ Sobolev uzayına bire-bir, örten bir g dönüşümü vardır ve bu dönüşümü Teorem 3.3'de tanımlandığı formda tanımlıdır;

Böylece $u \in \dot{S}_{2,\alpha,\beta}(a,b)$ ve $v \in \dot{W}_{\beta}^2(a,b)$ olmak üzere

$$v \equiv g(u) \in \dot{W}_{\beta}^2(a,b) \Leftrightarrow u \equiv g^{-1}(v) \in \dot{S}_{2,\alpha,\beta}(a,b)$$

Teorem 3.5

$\alpha \geq \beta \geq 1$ olmak üzere $\dot{S}_{2,\alpha,\beta}(a,b)$ uzayından $\dot{W}_{\beta}^2(a,b)$ Sobolev uzayına bire-bir, örten bir g dönüşümü vardır ve bu dönüşümü Teorem 3.3'de tanımlandığı formda tanımlıdır;

Böylece $u \in \dot{S}_{2,\alpha,\beta}(a,b)$ ve $v \in \dot{W}_{\beta}^2(a,b)$ olmak üzere

$$v \equiv g(u) \in \dot{W}_{\beta}^2(a,b) \Leftrightarrow u \equiv g^{-1}(v) \in \dot{S}_{2,\alpha,\beta}(a,b)$$

Aşağıdaki örnek $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$ olmak üzere $g(t) \equiv |t|^{\frac{\alpha}{\beta}} t$ homeomorfizması yardımıyla $S_{1,\alpha,\beta}(a, b)$ ve $W_{\beta}^1(a, b)$ uzayları arasında elde ettiğimiz bire-bir eşleşmenin $S_{2,\alpha,\beta}(a, b)$ ve $W_{\beta}^2(a, b)$ arasında olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.9

$\alpha > 0$, $\beta \geq 1$, $\alpha - \beta \leq -1$, $-\infty < a < 0 < b < +\infty$ olmak üzere $u(x) \equiv x$ ($x \in [a, b]$) biçiminde tanımladığımız u fonksiyonu $S_{2,\alpha,\beta}(a, b)$ uzayındandır ancak

$$g(u) \equiv |u|^{\frac{\alpha}{\beta}} u \equiv |x|^{\frac{\alpha}{\beta}} x \notin W_{\beta}^2(a, b) \text{ dir.}$$

Aşağıdaki örnek $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$ olmak üzere $g(t) \equiv |t|^{\frac{\alpha}{\beta}} t$ homeomorfizması yardımıyla $S_{1,\alpha,\beta}(a, b)$ ve $W_{\beta}^1(a, b)$ uzayları arasında elde ettiğimiz bire-bir eşleşmenin $S_{2,\alpha,\beta}(a, b)$ ve $W_{\beta}^2(a, b)$ arasında olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.9

$\alpha > 0$, $\beta \geq 1$, $\alpha - \beta \leq -1$, $-\infty < a < 0 < b < +\infty$ olmak üzere $u(x) \equiv x$ ($x \in [a, b]$) biçiminde tanımladığımız u fonksiyonu $S_{2,\alpha,\beta}(a, b)$ uzayındandır ancak

$$g(u) \equiv |u|^{\frac{\alpha}{\beta}} u \equiv |x|^{\frac{\alpha}{\beta}} x \notin W_{\beta}^2(a, b) \text{ dir.}$$

Tanım 3.6

$\alpha \geq \beta \geq 1$ olmak üzere, aşağıdaki fonksiyon sınıflarını tanımlayalım:

$$\tilde{S}_{2,\alpha,\beta}(a,b) \equiv \left\{ u \in L_1(a,b) \mid [u]_{\tilde{S}_{1,\alpha,\beta}(a,b)}^{\alpha+\beta} \equiv \int_a^b |u|^{\alpha+\beta} dx + \int_a^b |u|^{\alpha-\beta} |Du|^{2\beta} dx + \int_a^b |u|^\alpha |D^2u|^\beta dx < \infty \right\}$$

ve

$$\bar{S}_{2,\alpha,\beta}(a,b) \equiv \{ u \in L_1(a,b) \mid [u]_{\bar{S}_{1,\alpha,\beta}(a,b)}^{\alpha+\beta} \equiv \int_a^b |u|^{\alpha+\beta} dx + \int_a^b |u|^\alpha |D^2u|^\beta dx + |u(b)|^{\alpha-\beta+1} |Du(b)|^{2\beta-1} + |u(a)|^{\alpha-\beta+1} |Du(a)|^{2\beta-1} < \infty \}$$

Tanım 3.6'da verilen uzaylar için aşağıdaki gömülmeler sağlanır.

Önerme 3.7

- (i) $\tilde{S}_{2,\alpha,\beta}(a, b) \hookrightarrow S_{1,\alpha,\beta}(a, b)$
- (ii) $\bar{S}_{2,\alpha,\beta}(a, b) \hookrightarrow S_{1,\alpha,\beta}(a, b)$
- (iii) $\bar{S}_{2,\alpha,\beta}(a, b) \hookrightarrow \tilde{S}_{2,\alpha,\beta}(a, b)$

Teorem 3.8

$\alpha \geq \beta \geq 1$ olmak üzere, $\tilde{S}_{2,\alpha,\beta}(a,b)$ uzayından $W_{\beta}^2(a,b)$ Sobolev uzayına sınırlı bir g dönüşümü vardır.

$$g : \tilde{S}_{2,\alpha,\beta}(a,b) \longrightarrow W_{\beta}^2(a,b)$$

ile verilen bu g dönüşümü Teorem 3.3 ve Teorem 3.5'da tanımlandığı formdadır. İlave olarak

$$g : \tilde{S}_{2,\alpha,\beta}(a,b) \longrightarrow g(\tilde{S}_{2,\alpha,\beta}(a,b)) \text{ bire-birdir.}$$

Şimdi ise S -uzaylarının lineer yapıda olmadığına dair model bir örnek verilecektir

Örnek 3.11

$\beta > 1$ olmak üzere $S_{1,1,\beta}(0,1)$ uzayı doğrusal olmayan uzaydır. Gerçekten $\tau \in \left(\frac{\beta-1}{\beta+1}, \frac{\beta-1}{\beta}\right]$ olmak üzere

$$u_0(x) \equiv x^\tau \text{ ve } u_1(x) \equiv \theta, \quad x \in (0,1), \quad (\theta \in \mathbb{R}_+^1 \text{ sabit.})$$

şeklinde tanımladığımız u_0, u_1 fonksiyonları $S_{1,1,\beta}(0,1)$ uzayının elemanıdırlar ancak,

$$u(x) \equiv u_0(x) + u_1(x) \equiv x^\tau + \theta \notin S_{1,1,\beta}(0,1)$$

Şimdi ise S -uzaylarının lineer yapıda olmadığına dair model bir örnek verilecektir

Örnek 3.11

$\beta > 1$ olmak üzere $S_{1,1,\beta}(0,1)$ uzayı doğrusal olmayan uzaydır. Gerçekten $\tau \in \left(\frac{\beta-1}{\beta+1}, \frac{\beta-1}{\beta}\right]$ olmak üzere

$$u_0(x) \equiv x^\tau \text{ ve } u_1(x) \equiv \theta, \quad x \in (0,1), \quad (\theta \in \mathbb{R}_+^1 \text{ sabit.})$$

şeklinde tanımladığımız u_0, u_1 fonksiyonları $S_{1,1,\beta}(0,1)$ uzayının elemanıdırlar ancak,

$$u(x) \equiv u_0(x) + u_1(x) \equiv x^\tau + \theta \notin S_{1,1,\beta}(0,1)$$

4. Çok Boyutlu Durum

$$\dot{W}_p^1(\Omega) \subset \dot{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega) \quad (*)$$

Teorem 4.1

$\Omega \subset \mathbb{R}^n (n \geq 2)$ sınırlı ve sınırı yeterince düzgün olan bir bölge olmak üzere, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 1$ olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan p 'ler için;

- (i) $\beta = n$ ise; $\forall p, p > \beta$
- (ii) $\beta > n$ ise; $\forall p, p \geq \beta$
- (iii) $\beta < n$ ise; $\forall p, p \geq \frac{n(\alpha+\beta)}{\alpha+n}$

$$\dot{W}_p^1(\Omega) \subset \dot{S}_{1,\alpha,\beta}(\Omega) \quad (4.1)$$

kapsaması sağlanır.

$$\mathring{S}_{2,\alpha,\beta}(\Omega) \subset \mathring{W}_p^1(\Omega) \quad (**)$$

Teorem 4.2

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) sınırlı ve sınırı yeterince düzgün olan bir bölge olmak üzere $\beta > \alpha \geq 0$, $\beta \geq 2$ eşitsizlikleri sağlansın. Bu taktirde aşağıdaki koşulları sağlayan keyfi p ve n sayıları için;

(i) $n = \alpha + \beta$ ise $1 \leq p < 2\beta$

(ii) $n < \alpha + \beta$ ise $1 \leq p \leq 2\beta$

(iii) $n > \alpha + \beta$ ise $1 \leq p \leq \frac{2n\beta(\alpha+\beta)}{2n\beta-(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)}$

$$\mathring{S}_{2,\alpha,\beta}(\Omega) \subset \mathring{W}_p^1(\Omega) \quad (4.2)$$

kapsaması sağlanır.

5. Referanslar

- [1] J. Bebernes, V. A. Galaktionov; *On classification of blow-up patterns for a quasilinear heat equation*, Differential Integral Equations 9 (4) (1996) 655-670.
- [2] H. Berestycki and L. Nirenberg; *Some qualitative properties of solutions of semilinear elliptic equations in cylindrical domains*, Analysis, Academic Press, Boston, 1990, pp. 115-164
- [3] H. Brezis; *Points critiques dans les problemes variationnels sans compacite*, Seminaire Bourbaki Vol. 1987-88 No. 698.
- [4] Yu. A. Dubinskii; *Weak convergence in nonlinear elliptic and parabolic equations*, Mat. Sb. 67(109), 1965.
- [5] Yu. A. Dubinskii; *Nonlinear elliptic and parabolic equations*, Itogi Nauki Tekhniki: Sovremennye Problemy Mat., vol9, Moscoe, 1976.

[6] S. I. Pohozaev; *Nonlinear operators having weakly closed range and quasilinear elliptic equations*, Mat. Sb. 78(120), 1969, 237-259

[7] K. N. Soltanov ; *Some Boundary Problem for Emden-Fowler Type Equations*, Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, (FSDONA, 2004) May.

[8] K. N. Soltanov ; *Some Imbedding Theorems and Nonlinear Differential Equations*, Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences, 1999.

[9] K. N. Soltanov; *Solvability nonlinear equations with operators the form of the sum the pseudomonotone and weakly compact*, Soviet Math. Dokl. 1992, v.324, no5, 944-948.

[10] K. N. Soltanov; *Some embedding theorems and its applications to nonlinear equations*, Differentsial'nie uravneniya, 20, 12, 1984.

- [11] K. N. Soltanov; *On the theory of normal solvability of nonlinear equations*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 278 (1984).
- [12] T. Tsutsumi, M. Ishiwata; *Regional blow-up of solutions to initial boundary value problem for $u_t = u^\delta (\Delta u + u)$* , Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 1997, 127, 4 871-887.
- [13] W. Walter; *Existence and convergence theorems for the boundary layer equations based on the line method*, Arch. Rational Mech. and Anal. 1970, 39, 3, 169-188.
- [14] M. Wiegner; *A degenerate diffusion equation with a nonlinear source term*, Nonlinear Anal. TMA, 1997, 28, 1977-1995.
- [15] S. Luckhaus, R. Dal Passo; *A degenerate diffusion problem not in divergence form*, J. Differential Equations, 1987, 69, 1-14.

TEŞEKKÜRLER...